149 — Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in End(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$

I] Valeurs propres et vecteurs propres

1] Notion d'élément propre

XX.1 [Rom]

Définition 1: On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si: $\ker(u - \lambda id)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, i.e. s'il existe $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, on dit que x est vecteur propre de u associé à λ. On appelle sous-espace propre associé à λ $E_\lambda := \ker(u - \lambda id)$. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Proposition 2: Si E est de dimension finie,
Alors: $\ker(u - \lambda id) \neq \{0\}$ ssi $(u - \lambda id) \notin GL(\mathbb{K}^n)$.

Remarque 3: En identifiant une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qu'elle définit dans la base canonique dans $\mathbb{K}^n$, on peut définir:

Définition 4: On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A s'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. On dit que x est vecteur propre associé à λ et on appelle sous-espace propre associé à λ: $E_\lambda := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$.

Théorème 5: Les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont toutes réelles.

2] Polynôme caractéristique et sous-espaces propres.

XX.1 [Rom]

Définition 6: On appelle polynôme caractéristique de u (resp. de A) $\chi_u(X) = \det(X id - u)$ (resp. $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$).

Proposition 7: $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

Lemme 8: Si E est de dimension finie, soit F sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors: $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$

Théorème 9: Si E est de dimension finie, soit $\lambda \in Sp(u)$.
Alors: $1 \leq \dim(\ker(u - \lambda id)) \leq \alpha$ avec α la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Exemple 10: (1) Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est: $\chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$.
(2) Pour $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ rotation d'angle θ, on a: $\chi_{R_\theta}(X) = [X - \cos(\theta)]^2 + \sin^2(\theta)$ et pour $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ réflexion, on a: $\chi_{S_\theta}(X) = X^2 - 1$.
(3) Pour $u: \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto XP$, $\ker(u - \lambda_k id) = \{0\}$ d'où $Sp(u) = \emptyset$

XX.2 [Rom]

Théorème 11: Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = Sp(u)$ et $(E_k = \ker(u - \lambda_k id))_{k=1}^{p}$
Alors: les (E_k) sont en somme directe.

3] Valeurs propres des endomorphismes nilpotents

On suppose par la suite E de dimension finie.

Lemme 12: Soit $u \in End(E)$ nilpotent
Alors: $0 \in Sp(u)$ et $Tr(u) = 0$

Théorème 13: Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos,
Alors: u est nilpotent ssi $Sp(u) = \{0\}$

Contre-exemple 14: L'hypothèse sur $\mathbb{K}$ est vitale!
Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $0 \in Sp(A)$ mais A non-nilpotente.

Lemme 15: Soit $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{K}^n$
Alors: $\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\omega_j - \omega_i)$

[Tsen]

Lemme 16: u est nilpotente ssi $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $Tr(u^p) = 0$

Théorème 17: (de Burnside) Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\exists N \in \mathbb{N}^* \mid \forall A \in G$, $A^N = I_n$. **Alors:** G est fini.

II] Normes matricielles et conditionnement

1] Normes matricielles et rayon spectral

Soit par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

III.1

Définition 18 : Soit $\|\cdot\|$ norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Exemple 19 : $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme matricielle

Définition 20 : Soit $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{K}^n$. La norme matricielle subordonnée est : $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

[AII]

Proposition 21 : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : (1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\|$

(2) Il existe $x_A \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $\frac{\|Ax_A\|}{\|x_A\|} = \|A\|$

(3) $\|I_n\| = 1$

(4) Une norme matricielle subordonnée est une norme matricielle

Contrexemple 22 : Une norme matricielle n'est pas forcément subordonnée. En effet, $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$.

Définition 23 : On appelle rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$\rho(A) := \max_{\lambda \in Sp(A)} \{|\lambda|\}$$

Théorème 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Alors : $\|A\|_1 = \sup_{j \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$; $\|A\|_\infty = \sup_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}$ avec A^* l'adjoint de A.

Proposition 25 : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors : $\rho(A) \leq \|A\|$ et réciproquement, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ telle que $\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$

[IsoI]

Définition 26 : L'isobarycentre de $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n$ est le complexe $\frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \in \mathbb{C}$.

Lemme 27 : (déterminant circulant) Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Alors : $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_n \omega^{jk}$

[IsoI]

Application 28 : Soit P polygône de sommets $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n$ et $P_0 = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors : (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

2] Conditionnement de matrices

IV.5

Définition 29 : Soit $\|\cdot\|$ norme matricielle subordonnée. On appelle conditionnement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

Remarque 30 : Le conditionnement mesure la sensibilité du problème $Ax = b$ à des perturbations de A et b.

X.3

Définition 31 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On appelle conditionnement de A par le calcul de valeurs propres :
$$\Gamma(A) = \inf_{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}} \{cond(P)\}$$

[AII]

Exemple 32 : On souhaite contrôler les modules des valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \varepsilon \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & \end{pmatrix}$. On a $\chi_A(X) = (-1)^n (X^n - \varepsilon)$

Théorème 33 : (de Bauer-Fike) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée telle que $\left\|\begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}\right\| = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |d_i|$

Alors : pour toute perturbation matricielle δA, les valeurs propres de $A + \delta A$ sont dans $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ avec $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda_i| \leq \Gamma(A) \|\delta A\|\}$

Remarque 34 : L'hypothèse sur la norme matricielle est vérifiée par toutes les normes $\|\cdot\|_p$ avec $p \geq 1$.

III] Recherche de valeurs propres et de vecteurs propres

1] Pour des matrices complexes

XI.3 [Rom]

Théorème 35 : (de Gerschgörin-Hadamard) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in Sp(A)$

Alors : $\exists i \in [\![1;n]\!] \mid |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$

Remarque 36 : Le théorème indique que :

$$Sp(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(a_{i,i} ; \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|)$$

Exemple 37 : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -0 & -1 \\ -1 & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ (0) & & & \ddots & \\ & & -1 & & 1 \end{pmatrix}$, le théorème de Gerschgörin permet de calculer les valeurs propres de ${}^tAA$.

Définition 38 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale strictement dominante si : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$

Corollaire 39 : Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

2] Méthode de la puissance

XI.1 [All]

Théorème 40 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable de valeurs propres réelles $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| < \lambda_n$ associés à $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ vecteurs propres, soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $(y_k = Ax_{k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|})_{k \in \mathbb{N}}$

Alors : $\lim_{k \to +\infty} \|y_k\| = \lambda_n$ et $\lim_{k \to +\infty} x_k = \pm e_n =: x_\infty$

Remarque 41 : En adaptant les idées précédentes, on peut calculer la plus petite valeur propre de A en remplaçant A par A^{-1}.

Proposition 42 : La vitesse de convergence de cette méthode est donnée par : $\left| \|y_k\| - \lambda_n \right| \leq C \left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|} \right)^k$

$\|x_k - x_\infty\| \leq C \left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|} \right)^k$

Remarque 43 : On a une meilleure vitesse de convergence si on suppose A symétrique réelle.

3] Méthode de Jacobi

XI.2 [All]

Définition 44 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $p, q \in [\![1;n]\!]$. On appelle matrice de Givens :

$$Q(p;q;\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos(\theta) & & \sin(\theta) & \\ & & & & 1 & & \\ & & & -\sin(\theta) & & \cos(\theta) & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-ième ligne} \\ \\ \leftarrow q\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

La méthode de Jacobi pour calculer les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A consiste à créer $A_1 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_{k+1} = {}^tQ(p_k;q_k;\theta_k) A_k Q(p_k;q_k;\theta_k)$ où $(p_k;q_k)$ est tel que $|a^k_{p_k,q_k}| = \max_{i \neq j} |a^k_{i,j}|$ et θ_k est tel que $a^{k+1}_{p_k,q_k} = 0$.

Théorème 45 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_n\}$.

Alors : la suite des matrices A_k converge et $\lim A_k = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ avec $\sigma \in S_n$

Théorème 46 : Si de plus toutes les valeurs propres de A sont distinctes, alors la suite $(Q_k := Q(p_1;q_1;\theta_1) \times \dots \times Q(p_k;q_k;\theta_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice orthogonale dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de A dans le même ordre que les valeurs propres $(\lambda_{\sigma(i)})_{i=1}^n$.

Références :

[Rou] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Rouvière
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[All] Algèbre linéaire numérique - Allaire